Licence d'informatique

Algorithmique approfondie

Exemple d'algorithme dans les graphes

Bureau S3-354
mailto:Jean.Saquet@info.unicaen.fr
http://www.info.unicaen.fr/~jean/algo

Flot dans les graphes

Dans un graphe orienté valué, on associe à tout arc (u,v) une capacité c(u,v), et on impose que la valeur de l'arc (u,v) soit comprise entre 0 et c(u,v).

Un flot est la donnée pour chaque arc d'une valeur, telles que pour tout sommet, la somme des valeurs des arcs entrants soit égale à la somme des valeurs des arcs sortants.

Flot maximal

On suppose que le graphe possède un sommet source et un sommet puits (resp. pas de prédécesseur, pas de successeur).
Pour satisfaire la propriété du flot, on peut considérer qu'il y a un flot « retour » du puits à la source. Sa valeur est égale à la somme de toutes les valeurs des arcs sortant de la source (ou arrivant au puits).

On cherche à obtenir une valeur maximale pour ce total.

Ford et Fulkerson

Ford et Fulkerson ont proposé, en 1956, un algorithme permettant de trouver un flot maximal dans un tel graphe, ceci à partir d'un flot compatible quelconque (éventuellement le flot nul).

Cet algorithme est basé sur un processus itératif de marquage des sommets.

F. et F. - Notations

c(u,v) est la capacité de l'arc (u,v), f(u,v) la valeur de l'arc (u,v)
(u,v) étant un arc, on supposera toujours qu'il existe un arc dans l'autre sens, quitte à avoir une capacité c(v,u) nulle (et un f(v,u) de même).

On posera d(u,v) = c(u,v) – f(u,v) + f(v,u)
(capacité résiduelle de (u,v))

Maximiser le flot revient à réduire au maximum ces capacité résiduelles.

F. et F. - Algorithme

On va marquer un sommet u avec un couple (pere, valeur), où pere est un sommet prédécesseur de u, et valeur un nombre ou la valeur infinie.

On fera des étapes successives de marquage, en partant de la source et en cherchant à atteindre le puits.

Au départ, on marque la source avec (nil, infini), la source n'ayant pas de prédécesseur et on ne connaît pas encore de capacité résiduelle

F. et F. - Algorithme (suite)

Si u est un sommet déjà marqué avec (w,val), si v est un successeur de u non marqué tel que d(u,v) > 0,
Alors on marque v avec (u,min(val, d(u,v)))

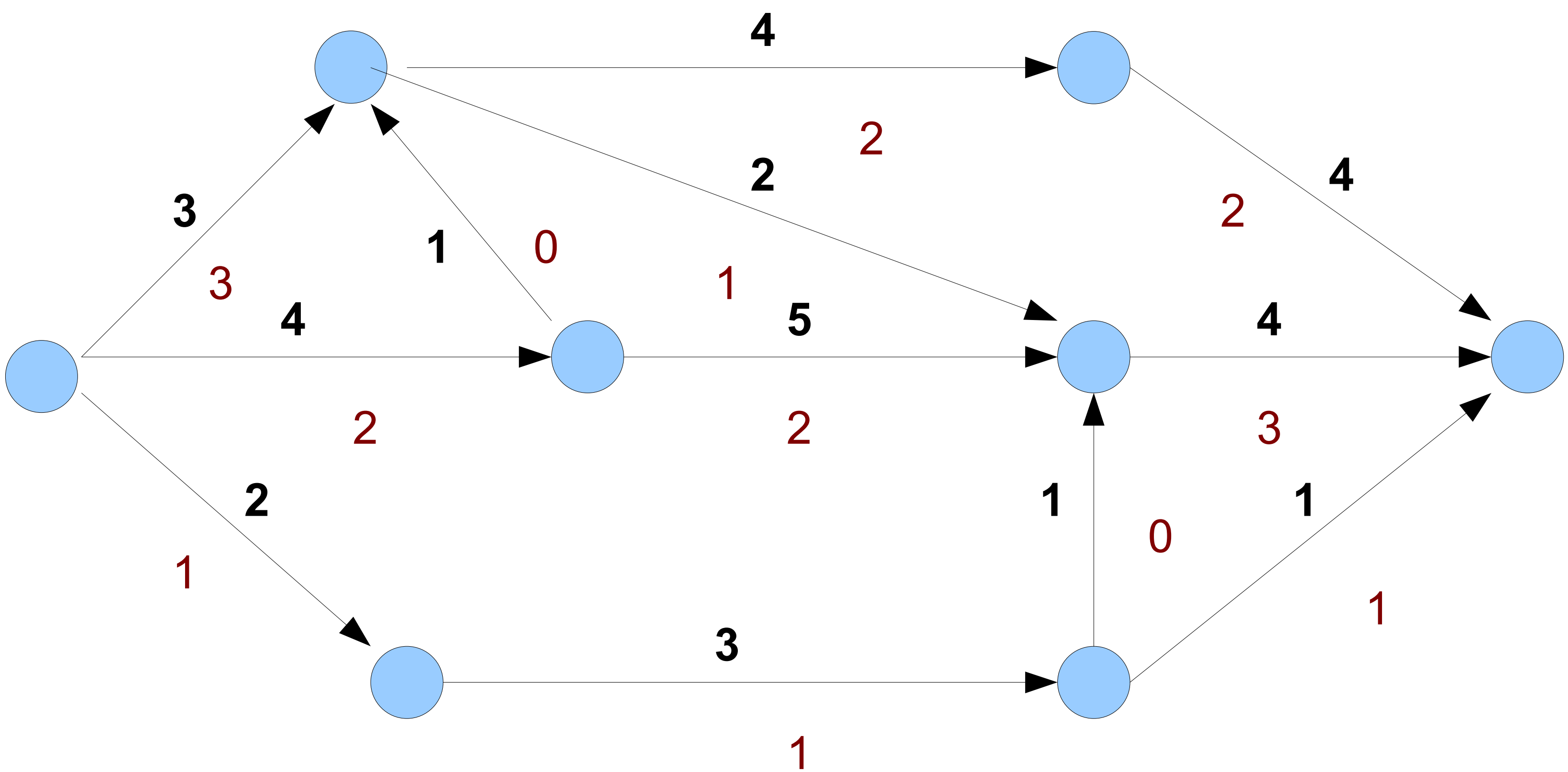
Si on parvient à marquer le puits, alors le flot n'est pas maximal. On le modifie en remontant le chemin ayant permis de le marquer, et en diminuant tous les d(x,y) de ce chemin de la valeur de marquage du puits

F. et F. - Algorithme (fin)

On recommence une nouvelle étape de marquage (après avoir effacé les anciennes marques), ceci jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible de marquer le puits.

Le flot obtenu est alors maximal (Ford et Fulkerson l'ont prouvé).

F. et F. - Exemple



En gras : capacité des arcs
En rouge : flot non maximal
Suivre l'algorithme pour le maximiser